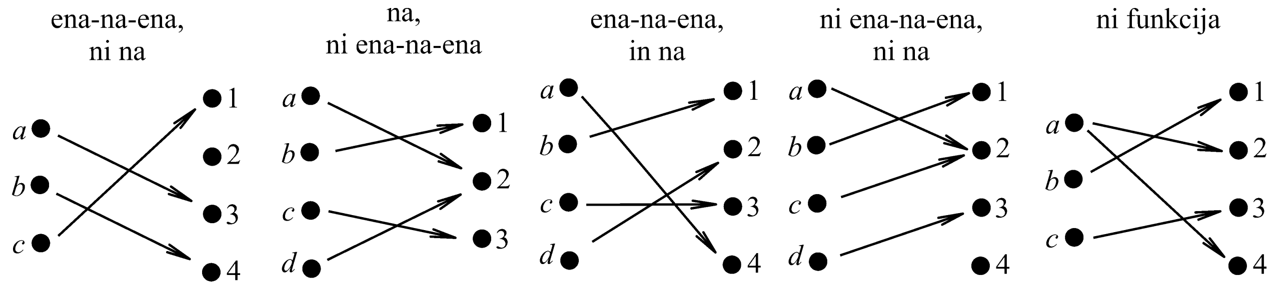
5 Homomorfizmi, izomorfizmi in automorfizmi grup

Definicija (injekcija, surjekcija, bijekcija)

Preslikavi, ki preslika poljubna dva različna elementa v različna elementa, rečemo injektivna (ena-na-ena, $1-1$) preslikava ali injekcija. Z drugimi besedami, preslikava $f : A \to B$ je injekcija (oziroma $1-1$) če in samo če $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (Ekvivalentno: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f_1 = x_2$).

Preslikavi $f : A \to B$, za katero je zaloga vrednosti kar cela množica B, rečemo surjektivna (oziroma na) preslikava ali surjekcija. Z drugimi besedami, če je $f(A) = B$, rečemo, da je f surjekcija (na). V tem primeru za vsak element $y \in B$ najdemo tak $x \in A$, da je $f(x) = y$.

Preslikavi, ki je injektivna in surjektivna, rečemo bijektivna preslikava ali bijekcija (rečemo tudi povratno enolična).



Primeri različnih tipov korespondence

1. (a) Naj bo G grupa, in naj bo $\phi : G \to G$ preslikava definirana s $\phi(x) = x^{-1}$. Pokaži, da je ϕ bijekcija. $[x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y,\ (x^{-1})^{-1} = x]$

(b) Naj bo $G = \langle a \rangle$, $a^{15} = e$ ciklična grupa reda 15, in naj bo $f : G \to G$ preslikava definirana z $f(x) = x^5$, $\forall x \in G$. Pokaži, da f ni injektivna funkcija. $[f(a) = a^5 = f(a^4)]$

Definicija (homomorfizem grup)

Naj bosta $(G, \cdot)$ in $(\overline{G}, \circ)$ grupi in naj bo $\phi : G \to \overline{G}$. Preslikava ϕ je homomorfizem med grupami G in $\overline{G}$ če in samo če za vsaka $g_1, g_2 \in G$ velja $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$.

2. Naj bo G ciklična grupa generirana z g ($G = \langle g \rangle$) in naj bo $(\mathbb{Z}, +)$ grupa celih števil glede na operacijo seštevanja. Pokaži, da je preslikava $\phi : \mathbb{Z} \to G$ definirana s $\phi(n) = g^n$ homomorfizem med grupami $\mathbb{Z}$ in G. $[\phi(m+n) = g^{m+n} = g^m g^n = \phi(m)\phi(n)]$

3. Dana sta grupi $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ in $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (kje sta
$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists A^{-1}\} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ad - bc \neq 0\}$ in
$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$). Pokaži, da je preslikava $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ definirana s $\phi(A) = \det(A)$ homomorfizem med grupami $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^*$. $[\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B)]$

4. Dani sta grupi $(\mathbb{T}, \cdot)$ in $(\mathbb{R}, +)$ (kje je $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Pokaži, da obstaja homomorfizem med $\mathbb{R}$ in $\mathbb{T}$. $[\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ \phi(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)]$

Definicija (izomorfizem grup)

Preslikava $\phi : G \to H$ grupe $(G, \cdot)$ v grupo $(H, \circ)$ se imenuje izomorfizem iz grupe G v grupo H če in samo če

(i) ϕ je injekcija;
(ii) ϕ je surjekcija;
(iii) $\phi(ab) = \phi(a) \circ \phi(b)$ za vse $a, b \in G$ (ϕ je homomorfizem).

Če obstaja izomorfizem iz G v H, pravimo, da sta G in H izomorfni. Oznaka $G \cong H$.

5. Dana sta dve grupi $(\mathbb{Z}_4, +)$ in $(\langle i \rangle \cdot)$ kje je $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Naj bo $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \langle i \rangle$ preslikava definirana s $\phi(n) = i^n$. Pokaži, da je ϕ izomorfizem grupe $\mathbb{Z}_4$ na grupo $\langle i \rangle$.

6. Naj bo G grupa celih števil glede na operacijo seštevanja in naj bo $\overline{G}$ podgrupa grupe $\mathbb{Q}^*$ ki vsebuje elemente oblike 2^n. Definirajmo preslikavo $\phi : G \to \overline{G}$ na naslednji način: $\phi(n) = 2^n$. Pokaži, da ϕ je izomorfizem iz G v $\overline{G}$. [$2^m = 2^n \Rightarrow m = n$, $\phi(m+n) = 2^{m+n} = 2^m 2^n = \phi(m)\phi(n)$]

7. Dana je grupa $(\mathbb{R}, +)$ in dana je preslikava $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $\phi(x) = x^3$. Preveri, ali je ϕ izomorfizem grupe G nase. [ϕ ni homomorfizem]

8. Naj bo $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ grupa vsih realnih metrik oblike 2×2, katerih vrednost determinante je enaka 1, in naj bo M neke 2×2 realna metrik t.d. $\det(M) = 1$. Pokaži, da je preslikava $\phi : G \to G$ definirana s $\phi_M(A) = MAM^{-1}$ izomorfizem grupe G nase.

Opomba. Obstajajo štiri koraki, ki jih moramo izvesti, da bi pokazali, da je grupa G izomorfna z grupo $\overline{G}$.

1. korak: "Preslikava".

Definirajmo kandidata za izomorfizem, tj. definirajmo funkcijo ϕ iz G v $\overline{G}$.

2. korak: "Injekcija".

Dokažimo da je ϕ injekcija, tj. domnevamo, da je $\phi(a) = \phi(b)$ in pokažimo, da je $a = b$.

3. korak: "Surjekcija".

Dokažimo, da je ϕ surjekcija, tj. za poljubni element $\overline{g} \in \overline{G}$ najdimo element $g \in G$ tako da je $\phi(g) = \overline{g}$.

4. korak: "Homomorfizem".

Dokažimo, da je ϕ homomorfizem, tj. za poljubna elementa $a, b \in G$ pokažemo, da je $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

9. Naj bo G grupa realnih števil glede na operacijo seštevanja in naj bo $\overline{G}$ grupa pozitivnih realnih števil glede na operacijo množenja. Pokaži, da sta G in $\overline{G}$ izomorfni grupi. [$\phi : G \to \overline{G}$, $\phi(x) = e^x$]

10. Naj bo G neskončna ciklična grupa in naj bo $\overline{G}$ grupa celih števil glede na operacijo seštevanja. Pokaži, da sta G in $\overline{G}$ izomorfni grupi. [$G = \langle a \rangle$, $\phi : G \to \overline{G}$, $\phi(a^k) = k$]

11. Pokaži, da je $U(10) \cong \mathbb{Z}_4$. [$\phi : U(10) \to \mathbb{Z}_4$, $\phi(3^k) = k \bmod 4$]

12. Pokaži, da $U(10) \ncong U(12)$. [$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$, $U(12) = \{1, 5, 7, 11\}$, $x^2 = 1$ za $\forall x \in U(12)$, $\phi(9) = \phi(1)$]

13. Dana sta grupi $(\mathbb{Q}, +)$ in $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Pokaži, da $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q}^*$. [$-1 = (\phi(\frac{a}{2}))^2$]

14. Naj bo G ciklična grupa reda n. Pokaži, da je $G \cong \mathbb{Z}_n$. [$\phi : G \to \mathbb{Z}_n$, $\phi(a^k) = k \bmod n$]

Definicija (automorfizem grupe G)

Preslikava ϕ iz grupe G samo vase se imenuje automorfizem grupe G če in samo če (i) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ za $\forall a, b \in G$; (ii) ϕ je injekcija; (iii) ϕ je surjekcija.

15. Naj bo G ne-abelska grupa in naj bo $f : G \to G$ definirana s $f(x) = x^{-1}$. Pokaži, da f ni automorfizem.

16. Naj bo $G = \langle a \rangle$, $a^{12} = e$ ciklična grupa reda 12, in naj bo $f : G \to G$ preslikava definirana na naslednji način: $f(x) = x^3$, $\forall x \in G$. Pokaži, da f ni automorfizem. [$f(a) = a^3 = f(a^5)$, ni $1-1$]

17. Naj bo G grupa pozitivnih realnih števil glede na operacijo množenja. Naj bo $\phi : G \to G$ definirano s $\phi(x) = x^2$, $x \in G$. Pokaži, da je ϕ automorfizem.

18. (a) Naj bo G nek grupa, kjer je $a^2 \neq e$ za nek $a \in G$. Pokaži, da ima grupa G netrivialne automorfizme.

(b) Naj bo G grupa. Pokaži, da je preslikava $x \to x^{-1}$ iz G v G automorfizem če in samo če je G abelska grupa.

(c) Naj bo G končna abelska grupa reda n, in naj bo m pozitivno celo število tuje z n. Pokaži, da je preslikava $f : G \to G$ definirana z $f(x) = x^m$, $x \in G$, automorfizem grupe G.

19. Naj bo f automorfizem grupe G. Če je H podgrupa grupe G, pokaži, da je potem $f(H)$ tudi podgrupa grupe G.